

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ingeniería Económica, Estadística y Ciencias Sociales

# “INVESTIGACIÓN SOBRE LAS INTEGRALES Y APLICACIONES EN LAS EMPRESAS CONTEMPORANEAS . ”

"LA APLICACION DEL CALCULO INTEGRAL"


**Integrantes:**

**Kyara, Atalaya Rubio**

**Liliana, Nuñez Vasquez**

**Daniel, Chilin Tolentino**

**Astrid, Vallejo Hidalgo**

**Erick, Guerra Escobar**

**Docente: Alan, Ysique Quesquen**

**Asignatura: Cálculo Integral**

**Escuela profesional de Ingenieria Economica Facultad de Ingeniería Económica, Estadística y CCSS**

**Universidad Nacional de Ingeniería**

***RESUMEN***

En el presente trabajo buscamos entender, que el cálculo integral es de gran importancia en muchas áreas de estudio como técnicos tecnólogos ingenierías etc. con el cálculo se puedes expresar fenómenos como áreas, volúmenes y solidos de revolución por lo cual es de gran importancia identificar el tema específico que se quiere trabajar en ingeniería ya que el cálculo integral abarca muchos temas de la ingeniería. En la ingeriría, son muchas las aplicaciones que se pueden encontrar, entre ellas se pueden mencionar, la aerodinámica, la dinámica, la mecánica de fluidos, análisis de estructuras, y la estabilidad y control de aeronaves.

La integral definida es un concepto relevante para abordar una amplia gama de problemas que los estudiantes de Ingeniería utilizan en su programa de estudios. Está presente en diversos contenidos y se requiere en actividades de aprendizaje a lo largo de su formación universitaria.

La integral definida es un tema de suma importancia, sus aplicaciones tienen alcances bastante amplios, en ramas y áreas como el aspecto industrial, la resolución de problemas planteados, tanto de las matemáticas propias como de la física y algunos conceptos de la misma, sean trabajo, presión, fuerza hidrostática, momentos y centros de masa, entre otras; cosas que sin la ayuda y aplicación de la integral definida serían demasiado complejas y aún, imposibles de resolver. Por ende, su estudio resulta bastante importante en su estudio y análisis, para llegar a entender desde una perspectiva matemáticamente analítica cómo se aplica y cómo funciona dentro del cálculo. Como una herramienta indispensable.

***Palabras clave:*** *Productor, excedente, integral definida, presupuestos, rendimiento, Economía, administración*

## INTRODUCCIÓN

Ingeniería es la profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquirido mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se aplica con buen juicio a fin de desarrollar las formas en que se pueden utilizar, de manera económica, los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la comunidad. " En ella, el conocimiento de las matemáticas y ciencias naturales, obtenido mediante estudio, experiencia y práctica, se aplica con juicio para desarrollar formas económicas de utilizar los materiales y las fuerzas de la naturaleza para beneficio de la humanidad y del ambiente. El cálculo integral es de gran importancia en muchas áreas de estudio como técnicos tecnólogos ingenierías etc. con el cálculo se puedes expresar fenómenos como áreas, volúmenes y solidos de revolución por lo cual es de gran importancia identificar el tema específico que se quiere trabajar en ingeniería ya que el cálculo integral abarca muchos temas de la ingeniería. En la ingeriría, son muchas las aplicaciones que se pueden encontrar, entre ellas se pueden mencionar, la aerodinámica, la dinámica, la mecánica de fluidos, análisis de estructuras, y la estabilidad y control de aeronaves.

## FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La problemática del caso está planteada en la difícil tarea de gestión y control dentro de la empresa, ya que la apertura de nuevos locales hace que cada día sea más compleja su gestión y control, la evidente necesidad de un nuevo sistema de gestión hace que el estudio de caso se dirija hacia un Cuadro de Mando Integral, que podría proporcionar una buena estructura de gestión para lograr las metas y objetivos planteados. Los problemas detectados se centran en la carencia de mediciones, la falta de participación de los miembros en la planificación y

organización de las estrategias, como también la escasez de una comunicación constante acerca del avance en materia de objetivos que se están consiguiendo. Para hacer frente a estas problemáticas, nos planteamos el siguiente objetivo general: formar un sistema de gestión y control que permita mejorar el rendimiento general de la empresa reduciendo la supervisión directa. Consideramos que, para alcanzar el objetivo propuesto, es necesario contar con objetivos específicos: identificar las actividades generadoras de valor; definir los indicadores de medida (ratios, presupuestos, encuestas, evaluaciones): aplicar una nueva política de comunicación; desarrollar el sistema; verificar y validar el sistema; capacitar al personal que empleará el sistema y por último implementar el sistema.

La integral indefinida se subdivide en: - Analizar el proceso de determinar la función, conociendo la misma denominándose antiderivada o la integral de la función dada. El estudiante con los conocimientos de las derivadas y la aplicación de las integrales podrá resolver ejercicios y problemas relacionados a la solución particular de una función determinada y establecer el valor de la constante C.

**Aplicaciones de las integrales en la administración y economía**, el objetivo principal, es que el estudiante aplique la integral indefinida en problemas de Economía, donde se realizara ejercicios teóricos y reales adaptados a determinar funciones de oferta y demanda, superávit de consumidores y productores, análisis marginales y pueda interpretar sus resultados.

**Métodos de integración**, se establece y coordina los diferentes métodos para calcular una antiderivada o integral indefinida de una función, estableciendo una solución más sencilla, y el estudiante aplique los conceptos de contabilidad, economía y administración para sugerir la solución de problemas relacionados con las empresas.

**Integral Definida**, dentro del estudio del cálculo integral, el cual es un tema que tiene mucha importancia, por lo que es necesario insistir en su concepción y sus aplicaciones, como aspectos esenciales para el entendimiento de diversos términos matemáticos. Además, la

integral definida cuenta con diversos elementos, parámetros y lineamentos para poder ser aplicada dentro de las funciones, siendo el teorema fundamental del cálculo una de ellas, por lo que se aborda de manera ordenada y sistemática cada una de sus partes, indispensables para comprender y aplicar de manera correcta la integral. De esta forma, será más fácil el entendimiento de la misma, además de abordar las diversas aplicaciones prácticas que tiene mediante ejemplos, lo cual hace la explicación más clara y concisa. **Aplicaciones en la Administración y Economía**, tiene como objetivo básico demostrar la aplicación de la matemática y el cálculo matemático en los aspectos y contenidos económicos, ya que son de uso diario, además de concientizar al estudiante de la utilización de la matemática en la vida. Se analiza cómo determinar entre el consumidor y productor; así como, calcular utilidad máxima con respecto al tiempo. Después de exponer los diferentes métodos de integración, y sus aplicaciones en la Administración y Economía.

## OBJETIVOS

Analizar el proceso de determinar la función, conociendo la misma denominándose antiderivada o la integral de la función dada. El estudiante con los conocimientos de las derivadas y la aplicación de las integrales podrá resolver ejercicios y problemas relacionados a la solución particular de una función determinada y establecer el valor de la constante C

- Modelar Procesos Empresariales: Desarrollar modelos matemáticos basados en integrales para representar y entender los procesos empresariales.
- Optimizar Cadenas de Suministro: Aplicar técnicas de cálculo integral para optimizar la gestión de la cadena de suministro, minimizando costos y mejorando la eficiencia.
- Gestionar Inventarios: Desarrollar modelos de inventario basados en integrales para gestionar los niveles de inventario de manera eficiente, evitando excesos o faltantes.
- Analizar Riesgos y Rentabilidad: Aplicar conceptos integrales en el análisis de riesgos y rendimientos para evaluar la rentabilidad de proyectos de inversión y tomar decisiones financieras.
- Implementar Investigación de Operaciones: Aplicar técnicas de investigación de operaciones basadas en integrales para resolver problemas complejos relacionados con la asignación de recursos y la toma de decisiones operativas.
- Desarrollar Modelos Predictivos: Implementar modelos predictivos basados en integrales para anticipar tendencias empresariales y tomar decisiones estratégicas basadas en datos futuros.

Estos objetivos específicos buscan aplicar los principios matemáticos de las integrales de manera práctica y significativa en el contexto empresarial, contribuyendo a la eficiencia operativa y a la toma de decisiones fundamentada.

# MARCO TEÓRICO

## APLICACIÓN DEL CALCULO INTEGRAL

### Integrales Definidas:

Es una herramienta cognitiva poderosa para modelar y resolver problemas en la ingeniería y económicos. Considerando las palabras del matemático francés Julio Enrique Poincaré (1854-1912), quien sostenía que: "Toda ciencia tiene de ciencia lo que tiene de Matemática", mediante la modelación y resolución de problemas que exigen la aplicación de la integral definida, se ha tratado de significar la importancia que tiene esta herramienta cognitiva poderosísima para los ingenieros.

### Importancia:

Las Integrales definidas resultan de gran importancia debido a la cantidad de problemáticas que puede llegar a resolver en el campo profesional y también abarcar tales como; Áreas, Volumen, longitud, etc. El cálculo de las misma proporciona los conocimientos necesarios para operar y aplicar funciones matemáticas con variable real en los planteamientos que se puedan presentar a un ingeniero o tecnólogo.

### Importancia en el área tecnológica:

En tiempos actuales, la educación avanza hacia las competencias educativas y profesionales, en el quehacer cotidiano de la vida real, y también la forma de aprender con el uso de las tecnologías de la información y software especializado, hacen más amena la materia de cálculo. Tiene una gran importancia debido a que son el sustento de un tema con un grado de complejidad elevados; tales como podemos mencionar:

- Resolución de Problemas de Transferencia de calor.
- Cálculo de Energía.
- Cálculo de la superficie terrestre, área y diámetro de perforación.

La integral definida es un concepto utilizado para determinar el valor de las áreas limitadas por curvas y rectas. Dado el intervalo (a, b) en el que, para cada uno de sus puntos x, se define una función f (x) que es mayor o igual que 0 en (a, b), se llama integral definida de la función entre los puntos a y b al área de la porción del plano que está limitada por la función, el eje horizontal X y las rectas verticales de ecuaciones x = a y x = b. La integral definida de la función entre los extremos del intervalo (a, b) se denota como:

$$\int_a^b f(x)dx$$

El cálculo integral tiene infinitas aplicaciones; el cálculo de área amorfas, longitudes de arco, puede aplicarse en estructuras de presas hidráulicas, en el trazo de curvas, entre otros. Creo que esas son las aplicaciones más sencillas que tiene el cálculo. A mi percepción el cálculo diferencial e integral aunados a la física, son la base de la ingeniería que a su vez tiene un papel bastante radical en la tecnología, la fundamenta como tal, y sin la aplicación de éstas, la tecnología no tendría una razón de ser.

Para finalizar ¿Cómo se pueden construir semejantes obras de ingeniería como las grandes presas, por ejemplo? Sin lugar a dudas es fácil concluir que esto se ha logrado gracias a las ciencias y las matemáticas. Y el cálculo integral sin dudas ha sido de gran importancia en la tecnología y las obras que se han hecho y con ello en el desarrollo del ser humano.

## APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL EN COMPUTACIÓN MATEMÁTICA

El trabajo de los computólogos en el área de las matemáticas se ha extendido hacia casi cualquier área de conocimiento, actualmente la mayoría de las micro, pequeñas y medianas empresas basan todos sus movimientos con la ayuda de computadoras, y ahí se centra la actividad principal de los Ingenieros y Licenciados en Ciencias de la Computación.

Estas actividades de las cuales hablamos que debe desarrollar un computólogo son entre otras las que se refieren a los siguientes puntos:

1. Generación de Software.
2. Creación de sistemas que coadyuven al mejoramiento de la comunicación entre empresas e instituciones.
3. Comunicación y transmisión de información.
4. Generación de Hardware que haga cada vez más eficiente
5. Investigación y desarrollo de los mecanismos computacionales que existen actualmente.

Estamos de acuerdo en que el mundo actual sería un caos sin la ayuda de las computadoras, artilugios que hacen que la información requerida por una empresa llegue en cuestión de segundos a su destinatario, pero todo esto tampoco se podría llevar a cabo sin la ayuda de lo que son precisamente las Ciencias de la Computación, entre ellas, el Cálculo, y en esta ocasión nos referimos especialmente al Cálculo Integral.

Una de las aplicaciones menos conocidas del entorno de la Computación es la creación de software para la generación de otros aparatos que facilitan la tarea de otras personas no dedicadas al área de las matemáticas; por ejemplo, que haría un físico-matemático si no contara con un software que tenga como tarea primordial el cálculo de funciones matemáticas, o la graficación de éstas mismas, la labor de este tipo de científicos se volvería muy tediosa, es por ello que en la actualidad se genera software como el de Mathemática, Derive, Maple y Theorist, los cuales pueden crear hermosas figuras de objetos matemáticos, y además realizar muchos tipos de cálculos incluyendo integración simbólica. Entre otras aplicaciones en las que se puede usar el Cálculo se encuentras las presentadas a continuación, que se refieren no solamente a la Computación matemática:

## EN NEGOCIOS

-*Costos de transporte:*

**Ejemplo:** Una compañía de autobuses está dispuesta a alquilar sus vehículos solo ha grupos de 35 o más personas. Si un grupo consta de 35 personas, cada una paga US$60. En grupos mayores, la tarifa de todas las personas se reduce en 50 centavos por cada persona adicional. Exprese los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo, elabore la gráfica y estime que tamaño del grupo maximizará los ingresos.

-*Costos de construcción:*

**Ejemplo:** Una caja cerrada, de base cuadrada, tiene un volumen de 250 $m^3$. El material de las partes superior e inferior de la caja cuesta US $2 por $m^2$ y el de los lados, US $1 por $m^2$. Exprese el volumen de la caja como una función de la longitud de su base.

## EN VOLUMEN

**Ejemplo:** A partir de una pieza cuadrada de cartón de 18 por 18 $pulg^2$, quitando un pequeño cuadrado de cada esquina y plegando las alas para formar los lados, construirá una caja abierta. Exprese el volumen de la caja resultante como una función de longitud x de un lado de los lados eliminados. Elabore la gráfica y calcule el valor de x para el cual el volumen de la caja resultante es el máximo.

## EN ECONOMÍA:

-*Distribución de fondos:*

**Ejemplo:** Un fabricante planea vender un nuevo producto al precio de US $150 por unidad y estima que si gastan x miles de dólares en desarrollo e y miles de dólares en promoción, los consumidores compraran aproximadamente (320y / y + 2)+(160x / x + 4) unidades del producto. Si los costos de fabricación de este producto son US $50 por unidad, ¿cuánto debería gastar el fabricante en desarrollo y cuanto en promoción para generar la mayor utilidad posible en la venta de este producto? [nota: Utilidad =(N º de unidades) (precio por unidad – costo por unidad) – cantidad total gastada en desarrollo y promoción]

*-Ventas al por menor:*

**Ejemplo:** Una lechería produce leche entera y leche descremada en cantidades x e y galones, respectivamente. Suponga que el precio de la leche entera es p(x)=000- x, y el de la leche descremada es q(y)=100-y. Suponga que $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ es la función de costos conjuntos de los productos. ¿Cuáles deberían ser x e y para maximizar las utilidades?

## EN CIENCIAS SOCIALES

*-Agotamiento de reservas:*

**Ejemplo:** Cierto gas raro usado en procesos industriales tenía reservas conocidas de 3 exp 11 $m^3$ en 1990. En 1991, se consumía 1.7 exp 9 $m^3$ del gas con un incremento anual del 7.3% ¿cuándo se agotarán las reservas conocidas del gas?

*-Valor presente:*

**Ejemplo:** Una inversión garantiza pagos anuales de US $1.000 a perpetuidad; empezando de inmediato con los pagos. Halle el valor presente de esta inversión si la tasa de interés anual predominante permanece fija al 12% capitalizado continuamente. (sugerencias: El valor presente de la inversión es la suma de los valores presentes de los pagos individuales.)

*-Control de calidad:*

**Ejemplo:** Tres inspectores se turnan para revisar componentes electrónicos a medida que salen de una línea de ensamblaje. Si el 10% de todos los componentes producidos en la línea de ensamblaje son defectuosos, halle la probabilidad de que el inspector que prueba el primer componente sea el mismo que encuentra el primer componente defectuoso.

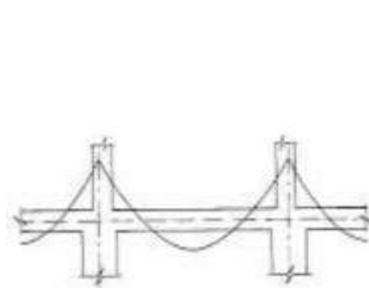
## INGENIERÍA EN AUTOMATIZACIÓN

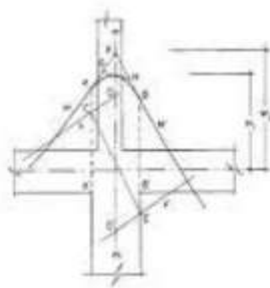
En el campo de la ingeniería en automatización, las integrales cumplen una función muy importante, para calcular integrales dobles y triples, definiciones, interpretación geométrica, expresión que permite reducirlas a integrales simples sucesivas, aplicaciones geométricas, corrientes, capacitancias, tiempos de carga y descarga de corriente, entre otras. Pero fundamentalmente, el cálculo integral es utilizado en circuitos RLC (resistencia, condensador y bobina) para analizar su comportamiento dentro del circuito.

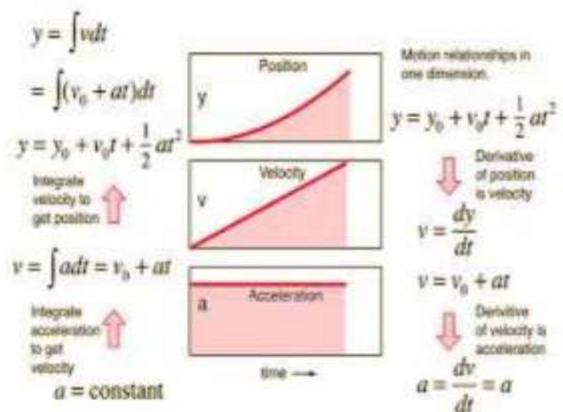


## INGENIERA CIVIL

En el campo de las construcciones, los arquitectos e ingenieros de estas áreas usualmente emplean la integral para obtener el área de superficies irregulares.
El centro de gravedad es el punto donde se concentra la masa cuerpo, de tal forma que se afirma que este es el punto de objeto. Las integrales definidas ayudan a buscar el punto exacto encuentra el centro de gravedad. Por medio de la integral definida se puede concluir cual que puede alcanzar una estructura al ponerle un peso.


Figura 10-1

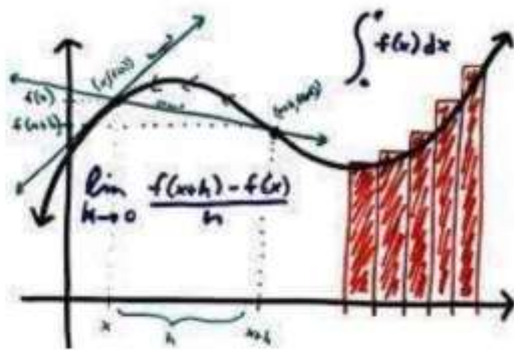

Figura 10-2



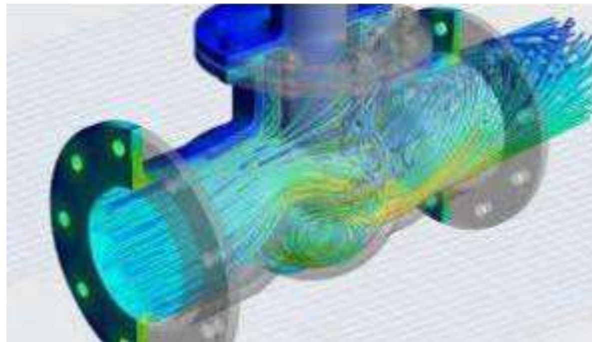
## INGENIERÍA INDUSTRIAL

Cuando trabajan con los costos de una empresa. Al tener el costo marginal de producción de un producto, pueden obtener la fórmula de costo total a través de integrales.

Las integrales definidas permiten calcular el área de las cuales se reflejan las ofertas y demandas se puede diferencia, así como la utilidad y excedente de un utiliza para funciones de costos, producción, ingresos para funciones de ahorro y consumo de una empresa; puede calcular el volumen de un sólido y optimizar su tal manera que lo produzca tenga un menor costo y la eficiencia.




**En la mecánica de fluidos.** Trabajar con la energía de los fluidos, las pérdidas que ocurren en el flujo y así calcular presiones necesarias, alturas de tanques, necesidades de bombeo, y hasta sedimentación en cauces naturales. Otra aplicación importante la tenemos en su uso para calcular el volumen de un sólido tridimensional. Este tipo de sólidos suele aparecer frecuentemente en ingeniería y en procesos de producción. Son ejemplos de sólidos de revolución: ejes, embudos, pilares, botellas y émbolos.



## SOFTWARE QUE OCUPAN EL CÁLCULO PARA REALIZAR DIVERSAS OPERACIONES, CONTROLAR O RESOLVER UN PROBLEMA.

Un ERP es un software que permite a las empresas controlar todos los flujos de información que se generan en cada ámbito de la organización. Sus siglas en inglés representan Enterprise Resource Planning o sistema de planificación de recursos empresariales en español.

El objetivo de los sistemas ERP es integrar los departamentos. Donde antes teníamos un programa especializado para cada uno, ahora, podemos asegurar la existencia de una única base de datos centralizada donde se gestione la información en tiempo real y con eficiencia.

De este modo, los ERP suelen estar integrados por diferentes módulos, correspondientes a cada departamento. Los componentes más comunes son los de compras, ventas, inventario, logística, facturación, contabilidad, recursos humanos (RRHH) y CRM (Customer Relationship Management).

## ¿Qué es la automatización?

La automatización consiste en usar la tecnología para realizar tareas casi sin necesidad de las personas necesita el cálculo para programarlas ya sea su velocidad, precisión, etc. Se puede implementar en cualquier sector en el que se lleven a cabo tareas repetitivas. Sin embargo, es más común en aquellos relacionados con la fabricación, la robótica y los automóviles, así como en el mundo de la tecnología, como el software de decisiones empresariales y los sistemas de TI.

## ¿Qué es la PYME?

El texto define los tipos de empresa y fija un método transparente para calcular los límites financieros y el número de empleados. Para pertenecer a una categoría se debe cumplir el límite de número de empleados y no superar la cifra de volumen de negocio o la de balance general.

Datos que hay que tomar en cuenta para calcular los efectivos, los importes financieros y el período de referencia:

1.Los datos seleccionados para el cálculo del personal y los importes financieros serán los correspondientes al último ejercicio contable cerrado y se calcularán sobre una base anual. Se tendrán en cuenta a partir de la fecha en la que se cierren las cuentas. El total de volumen de negocios se calculará sin el impuesto sobre el valor añadido (IVA) ni tributos indirectos.

2. Cuando una empresa, en la fecha de cierre de las cuentas, constate que se han excedido en un sentido o en otro, y sobre una base anual, los límites de efectivos o financieros, esta circunstancia solo le hará adquirir o perder la calidad de mediana o pequeña empresa, o de microempresa, si este exceso se produce en dos ejercicios consecutivos.

3. En empresas de nueva creación que no hayan cerrado aún sus cuentas, se utilizarán datos basados en estimaciones fiables realizadas durante el ejercicio financiero.

## Funciones de Lince Indumentaria:

- ***Gestión de Ventas Minorista.*** Agiliza la gestión de ventas. Registración y emisión de comprobantes de venta, facturación electrónica.

- ***Gestión de Compras***. Registro de comprobantes de compra. Factura de compra, nota de débito, nota de crédito, pedidos, remitos.

- ***Toma de Inventario.*** Controla y ajusta las diferencias del stock del sistema en función al inventario físico.

- ***Tarjetas de Crédito.*** Cupones de tarjetas de crédito/débito con información ampliada. Cierre de lotes de cupones de operadoras de tarjetas. Acreditación de cupones. Integración con Posnet.

- ***Contabilidad.*** Permite generar planes de cuenta, configurar asientos predeterminados, realizar asientos manuales y emitir reportes contables.

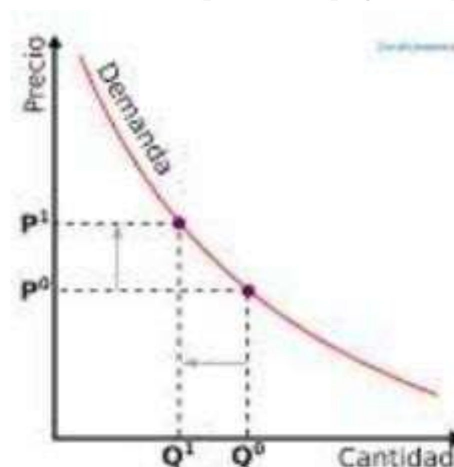
- ***Programador de Tareas.*** Configura acciones periódicas sobre envíos y recepción de transferencias de datos entre locales.

- ***Centralizador.*** Manejo de información automatizada entre locales.

- ***Zoo Logic Cubos.*** Acceso a cubos predeterminados y configurables por el usuario para el manejo de información con proyección estadística.

## <u>Función de la Demanda</u>

La empresa utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos demandados por los consumidores, con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad, de acuerdo con la demanda. En general, si el precio aumenta, se produce una disminución de la cantidad demandada del artículo porque no todos los consumidores están dispuestos a pagar un precio mayor por adquirirlo. La demanda disminuye al aumentar el precio por eso ésta es una función gráficos. Entonces, sea decreciente como puede asegurar s e observa en los ejemplos que para cada precio de un producto existe una cantidad correspondiente de éste que los consumidores demandan en determinado período. Si el precio por unidad de un producto está dado por p y la cantidad correspondiente en unidades está dada por q la ley que los relaciona se denomina función de demanda. A su gráfica se la llama gráfica de demanda.



***Ejemplo 1***

Determinación de la demanda a partir del ingreso marginal. Si la función del ingreso marginal del producto de una empresa es: $I'(x) = 2050 - 18x - 4x$ 2 Encontrar la función de la demanda.

*Solución:*

$$I(x) = \int (2050 - 18x - 4x^2)dx$$

$$I(x) = \int 2050dx - 18\int xdx - 4\int x^2dx$$

$$I(x) = 2050x - \frac{18x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + c$$

$$I(x) = 2050x - 9x^2 - 1.3x^3 + c$$

Suponiendo que no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es cero; esto es cuando I=0 x=0, determinado C=0, quedando la función:

$$\boldsymbol{I}(x) = 2050x - 9x^2 - 1.3x^3 + c$$

Como I=xp. Determinamos que la demanda p=I/x.

$$\underline{\boldsymbol{I}(\mathrm{x}) = 2050\mathrm{x} - 9\mathrm{x}^2 - 1.3\mathrm{x}^3 + \mathrm{c}}$$

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{x}} = \frac{2050\mathrm{x} - 9\mathrm{x}^2 - 1.3\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}}$$

$$\boldsymbol{p = 2050 - 9x - 1.3x^2}$$

## Función de Utilidad

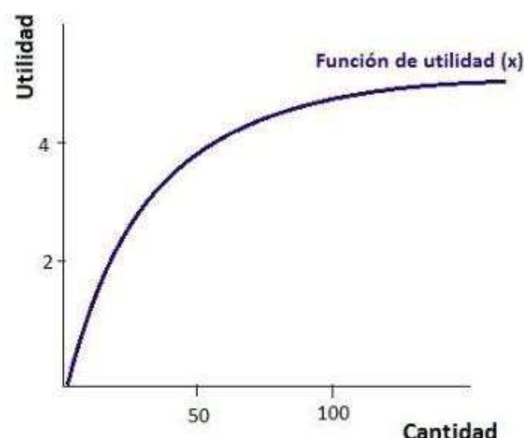
La función de utilidad para una empresa se basa en parte en la teoría sobre el consumidor, pero toma un sentido diferente en el cual lo que interesa es la cantidad monetaria que ganará al realizar una venta de los artículos que produce y el costo en el que incurre para producirlos. Recordemos que la función de utilidad de una empresa se determina como la diferencia entre ingresos y costos U(x) = I(x) – C(x), donde se espera que la empresa obtenga la mayor ganancia posible. Es de esperarse que, si las ventas de una empresa disminuyen, su ingreso también lo hará y, por lo tanto, la utilidad que espera obtener no será la deseada. De igual manera, la utilidad no será grande si los costos se incrementan.

De lo anterior se desprende que para un individuo la utilidad estará en función del número de bienes que puede adquirir con una cantidad de dinero, y para la empresa, la utilidad estará en función de la cuantía de artículos producidos que se demandan en el mercado.

En ocasiones nos interesa no sólo conocer la utilidad total que produce un artículo, o la

ganancia que obtiene una empresa al vender cierta cantidad de artículos, sino también determinar la utilidad marginal.

Por ejemplo, para comprender la noción de utilidad marginal para un individuo (o empresa), supongamos que una persona pasa un gran periodo de tiempo sin consumir líquidos y, por tanto, es de esperarse que tenga una gran necesidad de satisfacer su sed; al comenzar a tomar el primer vaso de agua la satisfacción o utilidad que le proporciona es alta, pero a medida que va ingiriendo más agua la satisfacción es cada vez menor.




Asimismo, una empresa espera que su utilidad se incremente al vender una mayor cantidad de artículos, por lo que tiene que incrementar su producción, pero también debe considerarse que al aumentar su producción debe subir sus costos, ya que puede ser necesario, además de adquirir una mayor cantidad de materia prima, contratar más personal o utilizar una mayor cantidad de maquinaria y equipo, cuestiones que si crecen demasiado llegarán a un punto donde los costos sobrepasen a los ingresos, provocando que las ganancias se conviertan en pérdidas.

La utilidad para una empresa es la cantidad monetaria que espera ganar al efectuar una venta luego de descontar los costos de los artículos que produjo y vendió.

En términos matemáticos podemos decir que al integrar la función de utilidad marginal obtenemos la utilidad total.

***Ejemplo 2***

***Una empresa comercializa entre otros productos pan de caja y un vino francés. La función de utilidad marginal del pan está dada por f(x) = 40 – 5x y la utilidad marginal del vino está dada por g(x) = 30 – x. Encontremos:***
***a) La función de utilidad total del pan.***
***b) La función de utilidad total del vino.***
***c) Si el consumidor desea adquirir tres paquetes de pan y tres de vino, cuál de los artículos le producirá mayor utilidad (satisfacción).***

*Solución:*

a) La función de utilidad total para el pan se representa por:

$$f1(x) = \int (40 - 5x)dx$$

Si empleamos las fórmulas descritas en la unidad anterior se tiene:

$$\int (40 - 5x)dx = 40\int dx - 5\int x\,dx$$

Con ello, la función de utilidad total del pan es:

$$f1(x) = \int 4x - \frac{5}{2}x^2 + c$$

Donde hacemos C = 0, ya que si no se compra ningún artículo la utilidad será cero.

b) La función de utilidad total del vino se define por:

$$f2(x) = \int (30 - x)\,dx$$

Al emplear las fórmulas de integración temenos

$$\int (30 - x)dx = 30\int dx - \int x\,dx$$

Así, la función de utilidad total del vino es:

$$f2(x) = 30x - \frac{1}{2}x^2 + c$$

Donde hacemos C = 0, ya que si no se compra ningún artículo la utilidad será cero.

c) La utilidad que le produce al consumidor adquirir tres paquetes de pan, considerando que x = 3 es:

$$\boldsymbol{f1(3) = \int 40(3) - \frac{5}{2}(3)^2 = 97.5}$$

Cuando el consumidor adquiere tres unidades de vino, su utilidad es:

$$\boldsymbol{f2(3) = 30(3) - \frac{1}{2}(3)^2 = 85.5}$$

Como puede observarse, el pan le produce una mayor utilidad a un individuo que el vino.
En este tipo de problemas, la función de utilidad de un consumidor es un tanto subjetiva, ya que no aporta gran información. El único objetivo es determinar qué artículo le da mayor utilidad a un individuo.
La función de utilidad de una empresa es más específica y más objetiva el sentido de que permite conocer el monto monetario en el cual se encuentran sus ganancias dependiendo del nivel de producción que mantenga. Por ello, centraremos nuestra atención en este tipo de problemas.

***Ejemplo 3***
*Un empresario sabe que sus funciones de ingreso marginal y costo marginal son I (x) = 8 – 6x + 2x2 y C (x) = 2 + 60x – x2. Con esta información, se desea conocer:*
*a) La función de ingreso total y el ingreso total si se producen 50 artículos y C = 200.*
*b) La función de costo total y el costo total si se producen 50 artículos y los gastos generales son de 800.*
*c) La utilidad total.*
*Solución*

a) Sea la función diferenciable, $\mathbf{I}\ (\mathbf{x}) = \mathbf{8 - 6x - 2}\boldsymbol{x}\mathbf{2}$ la función de ingreso total se define por:

$$fi(x) = \int (8 - 6x - 2x^2)dx = 8\int dx - 6\int xdx + 2\int x^2dx$$

Cuando empleamos las fórmulas de integración la función de ingreso total es:

$$fi(x) = 8x - 3x^2 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

Como queremos encontrar el ingreso total si x = 50 y C = 200:

$$fi(50) = 8(50) - 3(50)^2 + \frac{2}{3}(50)^3 + 200$$

$fi(50) = 76433.33$

b) Con la función C (x) = 2 + 60x – x2, el costo total es:

$$fc(x) = \int (2 + 60x - x^2)dx = 2\int dx + 60\int xdx - \int x^2dx$$

Al aplicar las reglas de integración, la función de costo total es:

$$fc(x) = 2x + 30x^2 - \frac{1}{3}x^3 + c$$

Dado que x = 50 y los gastos generales C = 800, tenemos:

$$fc(50) = 2(50) + 30(50)^2 - \frac{1}{3}(50)^3 + 800$$

$$fc(50) = 34233.33$$

c) Sabemos que el ingreso total es de 76 433.33 y el costo total es de 34 233.33. Recordemos que la utilidad se obtiene restando al ingreso total el costo total. De esta manera, la utilidad total es:

$$f(x) = fi(x) - fc(x)$$

$$\boldsymbol{fu(50) = 76433.33 - 34233.33 = 42200}$$

Con lo anterior podemos concluir que cuando la empresa produce y vende 50 artículos, la utilidad total es de $42,200.

## Agotamiento de recursos

Al hacer referencia al agotamiento de recursos en las empresas, primero debemos entender qué son y cuál es su función.

Un recurso es aquel elemento de carácter material, tecnológico o humano que sirve para llevar a cabo alguna tarea especifica donde se persigue un fin.

- **El recurso humano** entra en el apartado de agotamiento de recursos, cuando el personal que tiene una compañía ya no es suficiente para cumplir con los requerimientos de la empresa, considerando que existe un tope de personal que se puede contratar, ya que si se contrata más personal del necesario se producirán mayores costos a la compañía. Es decir, la producción aumentará por tener mayor personal, sin

embargo, este aumento en la producción será cada vez menor como resultado, por ejemplo, de no existir más maquinaria para ocupar este personal o de que entre ellos mismos entorpezcan sus labores por cuestión de espacio.

- **El recurso tecnológico** es importante en cuanto permite realizar una actividad de manera más eficiente. De igual manera, si se incrementa el recurso tecnológico la producción total aumentará, pero aumentará cada vez en menor proporción, esto debido a que si hay más máquinas puede no haber personal que las opere o que la producción mayor generada en una estación de trabajo genere inventario porque la siguiente estación no tiene capacidad suficiente para procesar el incremento que se da por tener un mejor equipo y esto provoque un desbalance de la línea. Es importante destacar que el recurso tecnológico no solo se refiere a la maquinaria, sino también se consideran todos aquellos elementos que permiten efectuar una actividad de manera más eficiente. Por ejemplo, una computadora permite agilizar trabajos de oficina con la posibilidad de realizar correcciones posteriores.

- **El recurso monetario** cobra importancia ya que permite destinar cantidades de dinero para realizar diversas actividades, como el pago de salarios y compra de materia prima, entre otras. Un aspecto relevante del recurso monetario es que de no existir utilidades para una empresa es posible que los costos se igualen a los ingresos o peor aún, que los costos superen a los ingresos, en cuyo caso la empresa tendrá pérdidas y no podrá hacer frente a sus necesidades Por lo expuesto, es importante revisar el agotamiento de recursos, como un elemento clave para las empresas.
- Una decisión a la que se enfrentan muchas organizaciones es la de determinar el punto óptimo en el tiempo en que deben sustituir una pieza importante de equipo. Dicho equipo se caracteriza con frecuencia por dos componentes de costo: el costo capital y el costo de operación. El costo capital es el costo de compra menos el valor de recuperación. Por ejemplo, si una máquina cuesta $100 000 y posteriormente se vende en $20 000, el costo capital es de $80 000. El costo de operación incluye los costos de propiedad y mantenimiento de una pieza de equipo. La gasolina, el aceite, el seguro y los costos de reparación asociados con tener y operar un vehículo pueden considerarse costos de operación. El costo de capital es útil para determinar el momento en el cual se debe reemplazar algún equipo, además de establecer el monto en el que habrá de incrementar o disminuir la ganancia de una empresa. Es en este sentido en el que se considera este rubro como un agotamiento de recurso, ya que la tecnología es un recurso indispensable en la mayoría de las actividades que desarrollan individuos o empresas, y si el equipo ya cumplió su vida útil es de esperarse que se reduzca su rendimiento, lo cual provoca que se incrementen los costos

Definimos como formación de capital a un proceso que se da a través del tiempo de manera continua, donde se incrementa la cantidad acumulada de los bienes de capital. La acumulación de bienes de capital puede expresarse en función del tiempo, K(t).

La tasa de formación de capital $\frac{dK(t)}{dt} = K'(t)$ igual al flujo de inversión neta, representada por i(t). Por lo tanto, la acumulación de bienes de capital es la integral con respecto al tiempo de flujo de inversión neta:

$$K'(t) = \int K'(t) \int t(dt)dt$$

De donde

$$t(dt) = K(t) + c$$

Debemos poner atención a la formación de capital en el sentido de que al acabarse la vida útil de algún equipo es necesario reponerlo y, además, en ocasiones resulta necesario adquirir mayores recursos tecnológicos para poder incrementar el nivel de producción.

## Inventarios

Un problema común en las organizaciones es determinar cuánto se debe tener en existencia de un cierto artículo. Para el vendedor a menudeo, el problema puede referirse a cuántas unidades de cada producto debe tener en existencia, ya que no vende grandes cantidades. Para los productores, el problema puede implicar qué cantidad de cada materia prima debe tener en existencia fin de que si de pronto se incrementa la demanda de sus productos, éste sea capaz de cubrir las necesidades de los consumidores sin tener problemas de abastecimiento.

Un inventario comprende las existencias de cualquier artículo, material o recurso utilizado en una organización en los procesos de fabricación y/o distribución. Las materias primas, las partes componentes, los subensambles y los productos terminados son parte del inventario, así como los diversos abastecimientos requeridos en el proceso de producción y distribución.

Este problema se identifica con un área llamada control de inventario o administración de inventarios. Respecto a la pregunta de qué cantidad de inventario se debe tener a mano, puede haber costos asociados con el hecho de tener muy poco o demasiado inventario. La necesidad de los inventarios surge de las diferencias entre el tiempo y la localización de la demanda y el abastecimiento, por lo que se usan como amortiguador entre la oferta y la demanda.

Las políticas de inventarios de materias primas, productos en proceso o artículos terminados, deben tener a lograr un flujo continuo entre funciones de producción y distribución.
En general, los problemas de inventario se relacionan con la respuesta de cuánto se debe ordenar (o producir) y con qué frecuencia se debe reordenar (o producir), a fin de minimizar los costos de llevar el inventario de producir u ordenar, de escasez o de faltante.

Cuando se habla de inventarios es necesario describir tres tipos de costos:

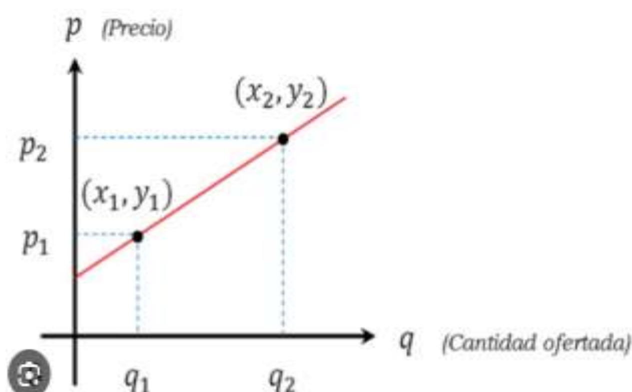
1. **Costos de comprar**. Se refieren al costo que involucra comprar artículos o materia prima para adquirir mercancía que habrá de utilizarse como protección ante una posible escasez o desabasto en el mercado.

2. **Costos de tener.** Este tipo de costo es aquel que se tiene cuando es necesario mantener un nivel satisfactorio de materia prima o producto terminado, incluye los costos de manejo, daños y pérdidas provocados por el manejo de los artículos, fletes, papelería y todos los requerimientos de registro del almacén, además de tener que reponer mercancía que haya sido empleada.

3. **Costo de mantener.** Costos que se generan por el hecho de tener un artículo en inventario, incluyen costos de capital invertido, costos de deterioro, obsolescencia, robos, seguros e impuestos y los costos de espacio, gastos de instalación, depreciación del edificio y equipo de almacén, renta de la superficie ocupada (aun cuando el edificio fuera propio) y seguridad.

## Función de oferta

Una empresa que fabrica y vende un determinado producto utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos que está dispuesta a ofrecer en el mercado con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad. Podemos decir que, en respuesta a distintos precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en algún período específico.




Cuanto mayor es el precio, mayor será la cantidad de productos que la empresa está dispuesta a ofrecer. Al reducirse el precio, se reduce la cantidad ofrecida. Esto nos permite asegurar que la función de oferta es una función creciente. Si p representa el precio por unidad y q la cantidad ofrecida correspondiente entonces a la ley que relaciona p y q se la denomina función de oferta y a su gráfica se la conoce como gráfica de oferta.

## Análisis marginal

La derivada y, en consecuencia, la integral, tienen aplicaciones en administración y economía en la construcción de las tasas marginales.

Es importante para los economistas este trabajo con el análisis marginal porque permite calcular el punto de maximización de utilidades.

En el análisis marginal se examinan los efectos incrementales en la rentabilidad. Si una firma está produciendo determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la utilidad si se produce y se vende una unidad más.

Para que este método pueda aplicarse a la maximización de utilidades se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Deberá ser posible identificar por separado las funciones de ingreso total y de costo total.
- Las funciones de ingreso y costo deben formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.

Damos algunas definiciones importantes para nuestro trabajo:

***Costo marginal:*** es el costo adicional que se obtiene al producir y vender una unidad más de un producto o servicio.

También se puede definir como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero.

Podemos pensar el costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida.
Debemos tener en cuenta que si c(x) es la función costo, el costo promedio de producir x artículos es el costo total dividido por el número de artículos producidos

$$\text{Costo promedio por artículo} = \frac{c(x)}{x}$$

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x + \Delta x) - c(x)}{\Delta x}$$

$$\text{Costo marginal} = c'(x) = \frac{dc}{dx}$$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

***Ingreso marginal:*** es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto o servicio.

Para una función de ingreso total r(x), la derivada r'(x) representa la tasa instantánea de cambio en el ingreso total con un cambio del número de unidades vendidas. Podemos decir que el ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Representa la tasa con que crece el ingreso con respecto al incremento del volumen de ventas.

***Utilidad marginal*** que obtiene una empresa está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. Si la función de ingreso es r(x) cuando se venden x artículos y si la función de costo es c(x) al producirse esos mismos artículos, la utilidad p(x) obtenida por producir y vender x artículos está dada por p(x) = r(x) – c(x).

La derivada p'(x) se denomina utilidad marginal y representa la utilidad por artículo si la producción sufre un pequeño incremento.

## Conclusión

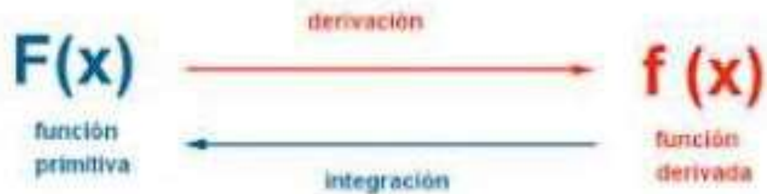
La importancia del cálculo integral es enorme. Tiene diversas aplicaciones en la ingeniería, la economía y la vida cotidiana. Algunas de las aplicaciones incluyen el cálculo de la superficie, de volumen, momento de inercia, de trabajo y muchos más.

La importancia del Cálculo en la vida cotidiana es muy extensa, ya que la ciencia y la tecnología modernas básicamente serían imposibles sin él. Las leyes naturales se expresan mediante ecuaciones que involucran funciones y sus derivadas, el análisis de estas ecuaciones se realiza mediante las herramientas del cálculo. Todo esto nos va a llevar a la aplicación del cálculo integral para realizar las obras más grandiosas y más exactas que se puedan, esto está relacionado con las demás ramas como la sociología, economía, literatura, informática, que se les conoce como ciencias exactas, y es muy importante que las ciencias exactas y el cálculo integral se relacionen entre sí para sacarle más provecho a todas las cosas por hacer y mejorar las que ya existen. Ahora que la importancia del cálculo integral es un conjunto de herramientas que se van a utilizar en las ciencias exactas, sociales, naturales, y administrativas y como pudimos observar en los ejemplos se aplica para distintas resoluciones de problemas en empresas ya sea pequeñas o grandes.

La derivada y, en consecuencia, la integral, tienen aplicaciones en administración y economía en la construcción de las tasas marginales. Es importante para los economistas este trabajo con el análisis marginal porque permite calcular el punto de maximización de utilidades

Recordemos que la integración se entendía como un tipo de "proceso de suma" que permitía sumar infinitas cantidades "infinitesimales" (es decir, infinitamente pequeñas).

Recordemos también que la integración viene a ser como "el proceso contrario de la derivación" por lo que si conocemos la derivada de una función y queremos obtener la función tendremos que integrar:




El cálculo integral tiene una gran variedad de aplicaciones como, por ejemplo:

- Cálculo de áreas de superficies planas.
- Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.
- Cálculo de volúmenes de sólidos con secciones conocidas.
- Cálculo de superficies de cuerpos de revolución. Cálculo de longitudes de curvas.
- Para calcular probabilidades en variables aleatorias continuas.
- Para examinar el comportamiento aleatorio de variables continuas (función de densidad - probabilidad).
- Para la propagación de incertidumbres, algoritmos y en probabilidades financieras.
- Para obtener velocidades y aceleraciones de móviles.
- Al calcular momentos de inercia.
- Al calcular el trabajo realizado por una fuerza variable.

## **Bibliografía**


• Hernández, J. A. G. (2019, 7 mayo). Algunas aplicaciones del cálculo integral. entenderlas mates. Recuperado de, http://entenderlasmates.blogspot.com/2019/06/algunas-aplicaciones-delcalculo.html

• Fano, A. (2012, 1 junio). Aplicaciones simples de cálculo integral. slideshare. Recuperado de, https://es.slideshare.net/AaronFano/aplicaciones-simples-decalculo-integral • parentesys.com (Óscar H Caballero. (2015, 23 marzo). Aplicaciones Del Calculo Integral en La Vida Diaria. La variable. Recuperado de, https://www.periodicodigitalgratis.com/35960/aplicaciones-del-calculo-integral-enla-vida-diaria-con269132

Naudimar, A. (2016, 17 septiembre). Importancia de la integrales definidad en el area de tecnologia. Issuu. Recuperado de, https://issuu.com/naudimar/docs/importancia_de_la_integrales_defini#:%7E:text=El%20c%C3%A1lculo%20integral%20tiene%20infinitas,sencillas%20que%20tiene%20el%20c%C3%A1lculo. • Navarrete, M. (2016, 20 marzo). Importancia de las integrales en el área tecnologica. slideshare. Recuperado de, https://es.slideshare.net/MariaNavarrete12/importancia-de-las-integrales-en-el-reatecnologica

• Ortega, F. (2014, 25 septiembre). Aplicación de Las Derivadas e Integrales en La Ciencia y Tecnologia. Scribd. Rcuperado de, https://es.scribd.com/doc/241017279/Aplicacion-de-Las-Derivadas-e-Integrales-enLa-Ciencia-y-Tecnologia

• Gobierno de España. (2021, 8 octubre). ¿Qué es la PYME? ipyme. Recuperado de, http://www.ipyme.org/esES/DatosPublicaciones/Paginas/DefinicionPYME.aspx

• fca. (2012, 2 junio). Aplicaciones en Economía. www.fca.unl.edu. Recuperado de, https://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/AplicacionesEconomia.htm